

\$SPAD/input schaum15.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.311	$\int \frac{dx}{x^4 + a^4}$	3
2	[1]:14.312	$\int \frac{x dx}{x^4 + a^4}$	9
3	[1]:14.313	$\int \frac{x^2 dx}{x^4 + a^4}$	10
4	[1]:14.314	$\int \frac{x^3 dx}{x^4 + a^4}$	16
5	[1]:14.315	$\int \frac{dx}{x(x^4 + a^4)} dx$	17
6	[1]:14.316	$\int \frac{dx}{x^2(x^4 + a^4)}$	19
7	[1]:14.317	$\int \frac{dx}{x^3(x^4 + a^4)}$	25
8	[1]:14.318	$\int \frac{dx}{(x^4 - a^4)}$	26
9	[1]:14.319	$\int \frac{x dx}{(x^4 - a^4)}$	28
10	[1]:14.320	$\int \frac{x^2 dx}{x^4 - a^4}$	30
11	[1]:14.321	$\int \frac{x^3 dx}{x^4 - a^4}$	31
12	[1]:14.322	$\int \frac{dx}{x(x^4 - a^4)}$	32
13	[1]:14.323	$\int \frac{dx}{x^2(x^4 - a^4)}$	34
14	[1]:14.324	$\int \frac{dx}{x^3(x^4 - a^4)}$	36

1 [1]:14.311 $\int \frac{dx}{x^4 + a^4}$

$$\int \frac{1}{x^4 + a^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2} \right) - \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{ax\sqrt{2}}{x^2 - a^2}$$

```

(*)≡
)spool schaum15.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(1/(x^4+a^4),x)
--R
--R
--R (1)
--R      +-----+      +-----+2      +-----+
--R      | 1      8 | 1      4 +-+ | 1      2
--R      |----- log(16a |----- + 4a x\|2 |----- + x )
--R      4| 12      4| 12      4| 12
--R      \|256a      \|256a      \|256a
--R  +
--R      +-----+      +-----+2      +-----+
--R      | 1      8 | 1      4 +-+ | 1      2
--R      - |----- log(16a |----- - 4a x\|2 |----- + x )
--R      4| 12      4| 12      4| 12
--R      \|256a      \|256a      \|256a
--R  +
--R      +-----+      +-----+      +-----+
--R      4 | 1      4a |-----      4 | 1
--R      4a |-----      \|256a      4a |-----
--R      +-----+      +-----+      +-----+
--R      | 1      4 | 1      4 | 1
--R      2 |----- atan(----- - 2 |----- atan(-----)
--R      4| 12      +-----+      4| 12      +-----+
--R      \|256a      4 | 1      +-+      \|256a      4 | 1      +-+
--R      4a |----- - x\|2      4a |----- + x\|2
--R      4| 12      4| 12
--R      \|256a      \|256a
--R  /
--R      +-+
--R      \|2
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 2
bb:=1/(4*a^3*sqrt(2))*log((x^2+a*x*sqrt(2)+a^2)/(x^2-a*x*sqrt(2)+a^2))-1/(2*a^3*sqrt(2))
--R
--R
--R      +-+      2      2      +-+
--R      +-+      - a x\|2  - x  - a      +-+      a x\|2
--R      \|2 log(-----) - 2\|2 atan(-----)
--R      +-+      2      2      2      2
--R      a x\|2  - x  - a      x  - a
--R (2) -----
--R
--R      3
--R      8a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 3
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      +-----+      +-----+2      +-----+
--R      3 | 1      8 | 1      4 +-+ | 1      2
--R      4a |----- log(16a |----- + 4a x\|2 |----- + x )
--R      4| 12      4| 12      4| 12
--R      \|256a      \|256a      \|256a
--R
--R      +
--R      +-----+      +-----+2      +-----+
--R      3 | 1      8 | 1      4 +-+ | 1      2
--R      - 4a |----- log(16a |----- - 4a x\|2 |----- + x )
--R      4| 12      4| 12      4| 12
--R      \|256a      \|256a      \|256a
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      4 | 1
--R      4a |-----
--R      4| 12
--R      \|256a
--R      3 | 1
--R      8a |----- atan(-----)
--R      4| 12      +-----+
--R      \|256a      4 | 1      +-+
--R      4a |----- - x\|2
--R      4| 12
--R      \|256a
--R
--R      +
--R      +-----+
--R      4 | 1
--R      4a |-----

```

```

--R          +-----+          4| 12          +-+ 2 2
--R          3 | 1          \|256a          - a x\|2 - x - a
--R    - 8a |----- atan(----- - log(-----)
--R          4| 12          +-----+          +-+ 2 2
--R          \|256a          4a |----- + x\|2          a x\|2 - x - a
--R                                4| 12
--R                                \|256a
--R  +
--R          +-+
--R          a x\|2
--R    2atan(-----)
--R          2 2
--R          x - a
--R  /
--R    3 +-+
--R    4a \|2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 4
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R          - x + %i
--R          %i log(-----)
--R          x + %i
--R  (4) atan(x) == - -----
--R                    2
--R          Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 5
dd:=atanrule cc
--R
--R  (5)
--R          +-----+          +-----+2          +-----+
--R          3 | 1          8 | 1          4 +-+ | 1 2
--R    4a |----- log(16a |----- + 4a x\|2 |----- + x )
--R          4| 12          4| 12          4| 12
--R          \|256a          \|256a          \|256a
--R  +
--R          +-----+          +-----+2          +-----+
--R          3 | 1          8 | 1          4 +-+ | 1 2
--R    - 4a |----- log(16a |----- - 4a x\|2 |----- + x )
--R          4| 12          4| 12          4| 12
--R          \|256a          \|256a          \|256a

```

```

--R      +
--R      +-----+
--R      4 | 1      +-+
--R      (- 4 + 4%i)a |----- + %i x\|2
--R      +-----+
--R      3 | 1
--R      4%i a |----- log(-----)
--R      4| 12
--R      \|256a
--R      +-----+
--R      4 | 1      +-+
--R      (4 + 4%i)a |----- + %i x\|2
--R      4| 12
--R      \|256a
--R      +
--R      +-----+
--R      4 | 1      +-+
--R      (- 4 + 4%i)a |----- - %i x\|2
--R      4| 12
--R      \|256a
--R      +-----+
--R      3 | 1
--R      - 4%i a |----- log(-----)
--R      4| 12
--R      \|256a
--R      +-----+
--R      4 | 1      +-+
--R      (4 + 4%i)a |----- - %i x\|2
--R      4| 12
--R      \|256a
--R      +
--R      +-+      2      2      +-+      2      2
--R      - a x\|2 + %i x - %i a      - a x\|2 - x - a
--R      - %i log(-----) - log(-----)
--R      +-+      2      2      +-+      2      2
--R      a x\|2 + %i x - %i a      a x\|2 - x - a
--R      /
--R      3 +-+
--R      4a \|2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 6
ee:=rootSimp dd

```

```

--R      (6)
--R      +-+      2      2      +-+
--R      x\|2 + (1 + %i)a
--R      log(a x\|2 + x + a ) + %i log(-----)
--R      +-+
--R      x\|2 + (1 - %i)a
--R      +

```

```

--R          +-+          +-+      2      2
--R          x\|2 + (- 1 - %i)a      - a x\|2 + %i x - %i a
--R      - %i log(-----) - %i log(-----)
--R          +-+          +-+      2      2
--R          x\|2 + (- 1 + %i)a      a x\|2 + %i x - %i a
--R      +
--R          +-+      2      2
--R          - a x\|2 - x - a
--R      - log(-----) - log(- a x\|2 + x + a )
--R          +-+      2      2
--R          a x\|2 - x - a
--R      /
--R      3 +-+
--R      4a \|2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 7
ff:=expandLog ee
--R
--R      (7)
--R          +-+      2      2          +-+      2      2
--R          %i log(a x\|2 + %i x - %i a ) - %i log(a x\|2 - %i x + %i a )
--R      +
--R          +-+          +-+
--R          %i log(x\|2 + (1 + %i)a) - %i log(x\|2 + (1 - %i)a)
--R      +
--R          +-+          +-+
--R          %i log(x\|2 + (- 1 + %i)a) - %i log(x\|2 + (- 1 - %i)a)
--R      +
--R          (- 2 - %i)log(- 1)
--R      /
--R      3 +-+
--R      4a \|2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 8
gg:=complexNormalize ff
--R
--R          %i          %i
--R          %i log(---) - %i log(- ---) + (- 2 - %i)log(- 1)
--R          2          2
--R      (8) -----
--R          3 +-+
--R          4a \|2

```

```
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E
```

```
--S 9      14:311 Schaums and Axiom differ by a constant
hh:=expandLog gg
```

```
--R
--R      %i log(%i) - %i log(- %i) + (- 2 - %i)log(- 1)
--R (9) -----
--R                               3 +-+
--R                              4a \|2
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E
```


2 [1]:14.312 $\int \frac{x dx}{x^4 + a^4}$

$$\int \frac{x}{x^4 + a^4} = \frac{1}{2a^2} \tan^{-1} \frac{x^2}{a^2}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 10
aa:=integrate(x/(x^4+a^4),x)
--R
--R
--R          2
--R         x
--R      atan(--)
--R          2
--R         a
--R (1)  -----
--R          2
--R         2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 11
bb:=1/(2*a^2)*atan(x^2/a^2)
--R
--R          2
--R         x
--R      atan(--)
--R          2
--R         a
--R (2)  -----
--R          2
--R         2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 12      14:312 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

3 [1]:14.313 $\int \frac{x^2 dx}{x^4 + a^4}$

$$\int \frac{x^2}{x^4 + a^4} = \frac{1}{4a\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2} \right) - \frac{1}{2a\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{ax\sqrt{2}}{x^2 - a^2}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 13
aa:=integrate(x^2/(x^4+a^4),x)
--R
--R
--R (1)
--R      +-----+      +-----+3      +-----+2
--R      | 1      4 +-+ | 1      4 | 1      2
--R      - |----- log(64a x\|2 |----- + 16a |----- + x )
--R      4| 4      4| 4      4| 4
--R      \|256a      \|256a      \|256a
--R
--R      +
--R      +-----+      +-----+3      +-----+2
--R      | 1      4 +-+ | 1      4 | 1      2
--R      |----- log(- 64a x\|2 |----- + 16a |----- + x )
--R      4| 4      4| 4      4| 4
--R      \|256a      \|256a      \|256a
--R
--R      +
--R      +-----+3      +-----+3
--R      4 | 1      4 | 1
--R      64a |-----      64a |-----
--R      4| 4      4| 4
--R      \|256a      \|256a
--R
--R      2 |----- atan(----- - 2 |----- atan(-----)
--R      4| 4      +-----+3      4| 4      +-----+3
--R      \|256a      4 | 1      +-+ \|256a      4 | 1      +-+
--R      64a |----- - x\|2      64a |----- + x\|2
--R      4| 4      4| 4
--R      \|256a      \|256a
--R
--R      /
--R      +-+
--R      \|2
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 14
bb:=1/(4*a*sqrt(2))*log((x^2-a*x*sqrt(2)+a^2)/(x^2+a*x*sqrt(2)+a^2))-1/(2*a*sqrt(2))*a

```

```

--R
--R
--R      +-+      2      2      +-+
--R      +-+      - a x\|2  + x  + a      +-+      a x\|2
--R      \|2 log(-----) - 2\|2 atan(-----)
--R      +-+      2      2      2      2
--R      a x\|2  + x  + a      x  - a
--R (2) -----
--R
--R      8a
--R
--R      Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 15
cc:=aa-bb

```

```

--R
--R (3)
--R
--R      +-----+      +-----+3      +-----+2
--R      | 1      4 +-+ | 1      4 | 1      2
--R      - 4a |----- log(64a x\|2 |----- + 16a |----- + x )
--R      4| 4      4| 4      4| 4
--R      \|256a      \|256a      \|256a
--R
--R      +
--R      +-----+      +-----+3      +-----+2
--R      | 1      4 +-+ | 1      4 | 1      2
--R      4a |----- log(- 64a x\|2 |----- + 16a |----- + x )
--R      4| 4      4| 4      4| 4
--R      \|256a      \|256a      \|256a
--R
--R      +
--R      +-----+3
--R      4 | 1
--R      64a |-----
--R      4| 4
--R      \|256a
--R      8a |----- atan(-----)
--R      4| 4      +-----+3
--R      \|256a      4 | 1      +-+
--R      64a |----- - x\|2
--R      4| 4
--R      \|256a
--R
--R      +
--R      +-----+3
--R      4 | 1
--R      64a |-----
--R      4| 4
--R      \|256a      +-+      2      2
--R      - 8a |----- atan(-----) - log(-----)
--R      4| 4      +-----+3      +-+      2      2

```

```

--R          \|256a          4 | 1      +-+          a x\|2 + x + a
--R          64a |----- + x\|2
--R          4| 4
--R          \|256a
--R  +
--R          +-+
--R          a x\|2
--R  2atan(-----)
--R          2 2
--R          x - a
--R /
--R          +-+
--R  4a\|2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 16
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R          - x + %i
--R          %i log(-----)
--R          x + %i
--R  (4) atan(x) == - -----
--R                    2
--R
--R          Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 17
dd:=atanrule cc
--R
--R  (5)
--R          +-----+          +-----+3          +-----+2
--R          | 1          4 +-+ | 1          4 | 1          2
--R  - 4a |----- log(64a x\|2 |----- + 16a |----- + x )
--R          4| 4          4| 4          4| 4
--R          \|256a          \|256a          \|256a
--R  +
--R
--R          +-----+3
--R          4 | 1      +-+
--R          (- 64 + 64%i)a |----- + %i x\|2
--R          4| 4
--R          \|256a
--R  4%i a |----- log(-----)
--R          4| 4          +-----+3
--R          \|256a          4 | 1      +-+
--R          (64 + 64%i)a |----- + %i x\|2

```

```

--R
--R
--R
--R      4| 4
--R      \|256a
--R
--R      +
--R
--R      +-----+3
--R      4 | 1      +-+
--R      (- 64 + 64%i)a |----- - %i x\|2
--R
--R      +-----+
--R      | 1
--R      4| 4
--R      \|256a
--R      - 4%i a |----- log(-----)
--R
--R      +-----+3
--R      4 | 1      +-+
--R      (64 + 64%i)a |----- - %i x\|2
--R
--R      4| 4
--R      \|256a
--R
--R      +
--R
--R      +-----+      +-----+3      +-----+2
--R      | 1      4 +-+ | 1      4 | 1      2
--R      4a |----- log(- 64a x\|2 |----- + 16a |----- + x )
--R      4| 4      4| 4      4| 4
--R      \|256a      \|256a      \|256a
--R
--R      +
--R
--R      +-+ 2 2      +-+ 2 2
--R      - a x\|2 + x + a      - a x\|2 + %i x - %i a
--R
--R      - log(-----) - %i log(-----)
--R
--R      +-+ 2 2      +-+ 2 2
--R      a x\|2 + x + a      a x\|2 + %i x - %i a
--R
--R      /
--R
--R      +-+
--R      4a\|2
--R
--R
--R
--R
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 18
ee:=expandLog dd

```

```

--R
--R      (6)
--R
--R      +-----+      +-----+3      +-----+2
--R      | 1      4 +-+ | 1      4 | 1      2
--R      - 4a |----- log(64a x\|2 |----- + 16a |----- + x )
--R      4| 4      4| 4      4| 4
--R      \|256a      \|256a      \|256a
--R
--R      +
--R
--R      +-----+      +-----+3      +-----+2
--R      | 1      4 +-+ | 1      4 | 1      2
--R      4a |----- log(64a x\|2 |----- - 16a |----- - x )
--R      4| 4      4| 4      4| 4

```

```

--R          \|256a          \|256a          \|256a
--R      +
--R          +-----+
--R          | 1
--R      4%i a |----- log((64 + 64%i)a 4 | 1      +-+
--R          4| 4 \|256a          \|256a          + x\|2 )
--R      +
--R          +-----+
--R          | 1
--R      - 4%i a |----- log((64 + 64%i)a 4 | 1      +-+
--R          4| 4 \|256a          \|256a          + %i x\|2 )
--R      +
--R          +-----+
--R          | 1
--R      4%i a |----- log((64 + 64%i)a 4 | 1      +-+
--R          4| 4 \|256a          \|256a          - %i x\|2 )
--R      +
--R          +-----+
--R          | 1
--R      - 4%i a |----- log((64 + 64%i)a 4 | 1      +-+
--R          4| 4 \|256a          \|256a          - x\|2 + 4a log(- 1) |-----
--R          \|256a          \|256a          \|256a
--R      +
--R          +-+ 2 2          +-+ 2 2
--R      log(a x\|2 + x + a ) + %i log(a x\|2 + %i x - %i a )
--R      +
--R          +-+ 2 2          +-+ 2 2
--R      - %i log(a x\|2 - %i x + %i a ) - log(a x\|2 - x - a )
--R      +
--R      (- 1 - %i)log(- 1)
--R      /
--R          +-+
--R      4a\|2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 19
ff:=rootSimp ee
--R
--R      (7)
--R          +-+ 2 2          +-+ 2 2
--R      %i log(a x\|2 + %i x - %i a ) - %i log(a x\|2 - %i x + %i a )
--R      +

```

```

--R          +-+
--R      %i log(x\|2 + (1 + %i)a) - %i log(%i x\|2 + (1 + %i)a)
--R      +
--R          +-+
--R      %i log(- %i x\|2 + (1 + %i)a) - %i log(- x\|2 + (1 + %i)a) - %i log(- 1)
--R      /
--R          +-+
--R      4a\|2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

--S 20 14:313 Schaums and Axiom differ by a constant

gg:=complexNormalize ff

```

--R
--R      %i log(2) - %i log(- 1) - %i log(- 2)
--R      (8) -----
--R                               +-+
--R                              4a\|2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

4 [1]:14.314 $\int \frac{x^3 dx}{x^4 + a^4}$

$$\int \frac{x^3}{x^4 + a^4} = \frac{1}{4} \ln(x^4 + a^4)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 21
aa:=integrate(x^3/(x^4+a^4),x)
```

```
--R
--R
--R          4      4
--R      log(x  + a )
--R (1)  -----
--R          4
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 22
bb:=1/4*log(x^4+a^4)
```

```
--R
--R          4      4
--R      log(x  + a )
--R (2)  -----
--R          4
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 23      14:314 Schaums and Axiom agree
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R (3)  0
```

Type: Expression Integer

```
--E
```


5 [1]:14.315 $\int \frac{dx}{x(x^4 + a^4)} dx$

$$\int \frac{1}{x(x^4 + a^4)} = \frac{1}{4a^4} \ln\left(\frac{x^4}{x^4 + a^4}\right)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 24
aa:=integrate(1/(x*(x^4+a^4)),x)
```

```
--R
--R
--R          4      4
--R      - log(x  + a ) + 4log(x)
--R (1) -----
--R          4
--R         4a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 25
bb:=1/(4*a^4)*log(x^4/(x^4+a^4))
```

```
--R
--R          4
--R          x
--R      log(-----)
--R          4      4
--R         x  + a
--R (2) -----
--R          4
--R         4a
```

Type: Expression Integer

```
--S 26
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R
--R          4      4      4
--R      - log(x  + a ) + 4log(x) - log(-----)
--R                                          4      4
--R                                          x  + a
--R (3) -----
--R          4
--R         4a
```

```
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 27      14:315 Schaums and Axiom agree
dd:=expandLog cc
--R
--R      (4)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

6 [1]:14.316 $\int \frac{dx}{x^2(x^4 + a^4)}$

$$\int \frac{1}{x^2(x^4 + a^4)} = -\frac{1}{a^4 x} - \frac{1}{4a^5\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}\right) + \frac{1}{2a^5\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{ax\sqrt{2}}{x^2 - a^2}$$

<*)+=

)clear all

--S 28

aa:=integrate(1/(x^2*(x^4+a^4)),x)

--R

--R

--R (1)

```

--R      +-----+      +-----+3      +-----+2
--R      4 | 1      16 +-+ | 1      12 | 1      2
--R      a x |----- log(64a x\|2 |----- + 16a |----- + x )
--R      4| 20      4| 20      4| 20
--R      \|256a      \|256a      \|256a
--R      +
--R      +-----+      +-----+3      +-----+2
--R      4 | 1      16 +-+ | 1      12 | 1      2
--R      - a x |----- log(- 64a x\|2 |----- + 16a |----- + x )
--R      4| 20      4| 20      4| 20
--R      \|256a      \|256a      \|256a
--R      +
--R      +-----+3
--R      16 | 1
--R      64a |-----
--R      4| 20
--R      \|256a
--R      - 2a x |----- atan(-----)
--R      4| 20      +-----+3
--R      \|256a      16 | 1      +-+
--R      64a |----- - x\|2
--R      4| 20
--R      \|256a
--R      +
--R      +-----+3
--R      16 | 1
--R      64a |-----
--R      4| 20
--R      \|256a      +-+
--R      2a x |----- atan(----- - \|2
--R      4| 20      +-----+3

```

```

--R          \|256a          16 | 1          +-+
--R          64a  |----- + x\|2
--R          4|  20
--R          \|256a
--R /
--R  4 +-+
--R  a x\|2
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 29
bb:=-1/(a^4*x)-1/(4*a^5*sqrt(2))*log((x^2-a*x*sqrt(2)+a^2)/(x^2+a*x*sqrt(2)+a^2))+1/(2
--R
--R          +-+  2  2          +-+
--R          +-+  - a x\|2 + x + a          +-+  a x\|2
--R          - x\|2 log(-----) + 2x\|2 atan(-----) - 8a
--R          +-+  2  2          2  2
--R          a x\|2 + x + a          x - a
--R (2) -----
--R          5
--R          8a x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 30
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R          +-----+          +-----+3          +-----+2
--R          5 | 1          16 +-+ | 1          12 | 1          2
--R          4a |----- log(64a x\|2 |----- + 16a |----- + x )
--R          4|  20          4|  20          4|  20
--R          \|256a          \|256a          \|256a
--R +
--R          +-----+          +-----+3          +-----+2
--R          5 | 1          16 +-+ | 1          12 | 1          2
--R          - 4a |----- log(- 64a x\|2 |----- + 16a |----- + x )
--R          4|  20          4|  20          4|  20
--R          \|256a          \|256a          \|256a
--R +
--R          +-----+3
--R          16 | 1
--R          64a |-----
--R          4|  20
--R          \|256a
--R          5 | 1
--R          - 8a |----- atan(-----)

```

```

--R          4| 20          +-----+3
--R          \|256a          16 | 1          +-+
--R          64a |----- - x\|2
--R          4| 20
--R          \|256a
--R
--R      +
--R
--R          +-----+3
--R          16 | 1
--R          64a |-----
--R          4| 20
--R          \|256a
--R
--R      +-----+          +-+ 2 2
--R      5 | 1          atan(-----) + log(-----)
--R      8a |-----          \|256a          a x\|2 + x + a
--R      4| 20          +-----+3          +-+ 2 2
--R      \|256a          16 | 1          +-+          a x\|2 + x + a
--R          64a |----- + x\|2
--R          4| 20
--R          \|256a
--R
--R      +
--R          +-+
--R          a x\|2
--R      - 2atan(-----)
--R          2 2
--R          x - a
--R
--R      /
--R      5 +-+
--R      4a \|2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 31
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R          - x + %i
--R          %i log(-----)
--R          x + %i
--R      (4) atan(x) == - -----
--R                      2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 32
dd:=atanrule cc
--R
--R      (5)
--R          +-----+          +-----+3          +-----+2
--R          5 | 1          16 +-+ | 1          12 | 1          2

```

```

--R      4a |----- log(64a x\|2 |----- + 16a |----- + x )
--R      4|  20      4|  20      4|  20
--R      \|256a      \|256a      \|256a
--R
--R      +
--R
--R      +-----+3
--R      16 |  1      +-+
--R      (- 64 + 64%i)a |----- + %i x\|2
--R      4|  20
--R      \|256a
--R
--R      +-----+
--R      5 |  1
--R      - 4%i a |----- log(-----)
--R      4|  20      +-----+3
--R      \|256a      16 |  1      +-+
--R      (64 + 64%i)a |----- + %i x\|2
--R      4|  20
--R      \|256a
--R
--R      +
--R
--R      +-----+3
--R      16 |  1      +-+
--R      (- 64 + 64%i)a |----- - %i x\|2
--R      4|  20
--R      \|256a
--R
--R      +-----+
--R      5 |  1
--R      4%i a |----- log(-----)
--R      4|  20      +-----+3
--R      \|256a      16 |  1      +-+
--R      (64 + 64%i)a |----- - %i x\|2
--R      4|  20
--R      \|256a
--R
--R      +
--R
--R      +-----+      +-----+3      +-----+2
--R      5 |  1      16 +-+ |  1      12 |  1      2
--R      - 4a |----- log(- 64a x\|2 |----- + 16a |----- + x )
--R      4|  20      4|  20      4|  20
--R      \|256a      \|256a      \|256a
--R
--R      +
--R
--R      +-+  2  2      +-+  2  2
--R      - a x\|2 + x + a      - a x\|2 + %i x - %i a
--R
--R      log(-----) + %i log(-----)
--R      +-+  2  2      +-+  2  2
--R      a x\|2 + x + a      a x\|2 + %i x - %i a
--R
--R      /
--R
--R      5 +-+
--R      4a \|2
--R
--R
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

--S 33

ee:=expandLog dd

```

--R
--R (6)
--R      +-----+      +-----+3      +-----+2
--R      5 | 1      16 +-+ | 1      12 | 1      2
--R      4a |----- log(64a x\|2 |----- + 16a |----- + x )
--R      4| 20      \|256a      4| 20      4| 20      \|256a
--R
--R +
--R      +-----+      +-----+3      +-----+2
--R      5 | 1      16 +-+ | 1      12 | 1      2
--R      - 4a |----- log(64a x\|2 |----- - 16a |----- - x )
--R      4| 20      \|256a      4| 20      4| 20      \|256a
--R
--R +
--R      +-----+      +-----+3
--R      5 | 1      16 | 1      +-+
--R      - 4%i a |----- log((64 + 64%i)a |----- + x\|2 )
--R      4| 20      \|256a      4| 20      \|256a
--R
--R +
--R      +-----+      +-----+3
--R      5 | 1      16 | 1      +-+
--R      4%i a |----- log((64 + 64%i)a |----- + %i x\|2 )
--R      4| 20      \|256a      4| 20      \|256a
--R
--R +
--R      +-----+      +-----+3
--R      5 | 1      16 | 1      +-+
--R      - 4%i a |----- log((64 + 64%i)a |----- - %i x\|2 )
--R      4| 20      \|256a      4| 20      \|256a
--R
--R +
--R      +-----+      +-----+3
--R      5 | 1      16 | 1      +-+
--R      4%i a |----- log((64 + 64%i)a |----- - x\|2 )
--R      4| 20      \|256a      4| 20      \|256a
--R
--R +
--R      +-----+
--R      5 | 1      +-+ 2 2
--R      - 4a log(- 1) |----- - log(a x\|2 + x + a )
--R      4| 20      \|256a
--R
--R +
--R      +-+ 2 2      +-+ 2 2

```

```

--R      - %i log(a x\|2  + %i x  - %i a ) + %i log(a x\|2  - %i x  + %i a )
--R      +
--R      +-+      2      2
--R      log(a x\|2  - x  - a ) + (1 + %i)log(- 1)
--R      /
--R      5 +-+
--R      4a \|2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 34
ff:=rootSimp ee
--R
--R      (7)
--R      +-+      2      2
--R      - %i log(a x\|2  + %i x  - %i a ) + %i log(a x\|2  - %i x  + %i a )
--R      +
--R      +-+      +-+
--R      - %i log(x\|2  + (1 + %i)a) + %i log(%i x\|2  + (1 + %i)a)
--R      +
--R      +-+      +-+
--R      - %i log(- %i x\|2  + (1 + %i)a) + %i log(- x\|2  + (1 + %i)a)
--R      +
--R      %i log(- 1)
--R      /
--R      5 +-+
--R      4a \|2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 35      14:316 Schaums and Axiom differ by a constant
gg:=complexNormalize ff
--R
--R      - %i log(2) + %i log(- 1) + %i log(- 2)
--R      (8) -----
--R      5 +-+
--R      4a \|2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```


7 [1]:14.317 $\int \frac{dx}{x^3(x^4 + a^4)}$

$$\int \frac{1}{x^3(x^4 + a^4)} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^6} \tan^{-1} \frac{x^2}{a^2}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 36
aa:=integrate(1/(x^3*(x^4+a^4)),x)
```

```
--R
--R
--R          2
--R      2   x   2
--R    - x atan(--) - a
--R          2
--R         a
--R (1) -----
--R          6 2
--R       2a x
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 37
bb:=-1/(2*a^4*x^2)-1/(2*a^6)*atan(x^2/a^2)
```

```
--R
--R
--R          2
--R      2   x   2
--R    - x atan(--) - a
--R          2
--R         a
--R (2) -----
--R          6 2
--R       2a x
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 38 14:317 Schaums and Axiom agree
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R (3) 0
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

8 [1]:14.318 $\int \frac{dx}{(x^4 - a^4)}$

$$\int \frac{1}{(x^4 - a^4)} = \frac{1}{4a^3} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) - \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

<*)+≡
)clear all

--S 39

aa:=integrate(1/(x^4-a^4),x)

--R

--R

$$\text{--R} \quad - \log(x + a) + \log(x - a) - 2 \operatorname{atan}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\text{--R} \quad (1) \quad \frac{\text{-----}}{4a^3}$$

--R

--R

--R

--E

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 40

bb:=1/(4*a^3)*log((x-a)/(x+a))-1/(2*a^3)*atan(x/a)

--R

$$\text{--R} \quad \log\left(\frac{x-a}{x+a}\right) - 2 \operatorname{atan}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\text{--R} \quad (2) \quad \frac{\text{-----}}{4a^3}$$

--R

--R

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 41

cc:=aa-bb

--R

$$\text{--R} \quad - \log(x + a) + \log(x - a) - \log\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$$

$$\text{--R} \quad (3) \quad \frac{\text{-----}}{4a^3}$$

--R

--R

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 42 14:318 Schaums and Axiom agree

dd:=expandLog cc

--R

--R (4) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

9 [1]:14.319 $\int \frac{x dx}{(x^4 - a^4)}$

$$\int \frac{x}{(x^4 - a^4)} = \frac{1}{4a^2} \ln \left(\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \right)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 43
```

```
aa:=integrate(x/(x^4-a^4),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      2      2      2      2
--R      - log(x  + a ) + log(x  - a )
--R (1) -----
```

```
--R      2
--R      4a
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 44
```

```
bb:=1/(4*a^2)*log((x^2-a^2)/(x^2+a^2))
```

```
--R
```

```
--R      2      2
--R      x  - a
--R      log(-----)
--R      2      2
--R      x  + a
--R (2) -----
```

```
--R      2
--R      4a
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 45
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R      2      2      2      2      2      2
--R      - log(x  + a ) + log(x  - a ) - log(-----)
--R      2      2
--R      x  + a
--R (3) -----
```

```
--R      2
--R      4a
```

```
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 46      14:319 Schaums and Axiom agree
dd:=expandLog cc
--R
--R      (4)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

10 [1]:14.320 $\int \frac{x^2 dx}{x^4 - a^4}$

$$\int \frac{x^2}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4a} \ln\left(\frac{x - a}{x + a}\right) + \frac{1}{2a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

(*)+≡
)clear all

--S 47

aa:=integrate(x^2/(x^4-a^4),x)

--R

--R

$$\text{--R} \quad - \log(x + a) + \log(x - a) + 2\operatorname{atan}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\text{--R} \quad (1) \quad \frac{\text{-----}}{4a}$$

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 48

bb:=1/(4*a)*log((x-a)/(x+a))+1/(2*a)*atan(x/a)

--R

$$\text{--R} \quad \log\left(\frac{x - a}{x + a}\right) + 2\operatorname{atan}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\text{--R} \quad (2) \quad \frac{\text{-----}}{4a}$$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 49

cc:=aa-bb

--R

$$\text{--R} \quad - \log(x + a) + \log(x - a) - \log\left(\frac{x - a}{x + a}\right)$$

$$\text{--R} \quad (3) \quad \frac{\text{-----}}{4a}$$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 50 14:320 Schaums and Axiom agree

dd:=expandLog cc

--R

```

--R (4) 0
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

11 [1]:14.321

$$\int \frac{x^3 dx}{x^4 - a^4}$$

$$\int \frac{x^3}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4} \ln(x^4 - a^4)$$

```

(*)+≡
)clear all

```

```

--S 51
aa:=integrate(x^3/(x^4-a^4),x)
--R
--R
--R          4      4
--R      log(x  - a )
--R (1)  -----
--R          4
--R
--R                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 52
bb:=1/4*log(x^4-a^4)
--R
--R          4      4
--R      log(x  - a )
--R (2)  -----
--R          4
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 53      14:321 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3) 0
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

12 [1]:14.322 $\int \frac{dx}{x(x^4 - a^4)}$

$$\int \frac{1}{x(x^4 - a^4)} = \frac{1}{4a^4} \ln\left(\frac{x^4 - a^4}{x^4}\right)$$

`<*>+≡
)clear all`

`--S 54
aa:=integrate(1/(x*(x^4-a^4)),x)`

`--R
--R
--R
--R`

$$(1) \frac{\log(x^4 - a^4) - 4\log(x)}{4a^4}$$

Type: Union(Expression Integer,...)

`--E`

`--S 55
bb:=1/(4*a^4)*log((x^4-a^4)/x^4)`

`--R
--R`

$$(2) \frac{\log\left(\frac{x^4 - a^4}{x^4}\right)}{4a^4}$$

Type: Expression Integer

`--E`

`--S 56
cc:=aa-bb`

`--R
--R`

$$(3) \frac{\log(x^4 - a^4) - 4\log(x) - \log\left(\frac{x^4 - a^4}{x^4}\right)}{4a^4}$$


```
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 57      14:322 Schaums and Axiom agree
dd:=expandLog cc
--R
--R      (4)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

13 [1]:14.323 $\int \frac{dx}{x^2(x^4 - a^4)}$

$$\int \frac{1}{x^2(x^4 - a^4)} = \frac{1}{a^4 x} + \frac{1}{4a^5} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + \frac{1}{2a^5} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

(*)+≡
)clear all

--S 58

aa:=integrate(1/(x^2*(x^4-a^4)),x)

--R

--R

--R
$$-x \log(x+a) + x \log(x-a) + 2x \operatorname{atan}\left(\frac{x}{a}\right) + 4a$$

--R (1) -----

--R
$$4a^5 x$$

--R Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 59

bb:=1/(a^4*x)+1/(4*a^5)*log((x-a)/(x+a))+1/(2*a^5)*atan(x/a)

--R

--R
$$x \log\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + 2x \operatorname{atan}\left(\frac{x}{a}\right) + 4a$$

--R (2) -----

--R
$$4a^5 x$$

--R Type: Expression Integer

--E

--S 60

cc:=aa-bb

--R

--R
$$-\log(x+a) + \log(x-a) - \log\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$$

--R (3) -----

--R
$$4a^5$$

--R Type: Expression Integer

--E

--S 61 14:323 Schaums and Axiom agree

dd:=expandLog cc

--R

--R (4) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

14 [1]:14.324 $\int \frac{dx}{x^3(x^4 - a^4)}$

$$\int \frac{1}{x^3(x^4 - a^4)} = \frac{1}{2a^4x^2} + \frac{1}{4a^6} \ln\left(\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}\right)$$

(*)+≡
)clear all

--S 62

aa:=integrate(1/(x^3*(x^4-a^4)),x)

--R

--R

--R
$$- x \log(x^2 + a^2) + x \log(x^2 - a^2) + 2a$$

--R (1) -----

--R
$$6 a^2$$

--R
$$4 a x$$

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 63

bb:=1/(2*a^4*x^2)+1/(4*a^6)*log((x^2-a^2)/(x^2+a^2))

--R

--R

--R
$$x \log\left(\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}\right) + 2a$$

--R
$$x^2 + a^2$$

--R (2) -----

--R
$$6 a^2$$

--R
$$4 a x$$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 64

cc:=aa-bb

--R

--R

--R
$$- \log(x^2 + a^2) + \log(x^2 - a^2) - \log\left(\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}\right)$$

--R
$$x^2 + a^2$$

--R (3) -----

--R
$$6$$

--R
$$4 a$$

--R

```
--R                                                    Type: Expression Integer
--E

--S 65      14:324 Schaums and Axiom agree
dd:=expandLog cc
--R
--R      (4)  0
--R                                                    Type: Expression Integer
--E
)spool
)lisp (bye)
```

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp73-74